

Расширения инфляционной модели Старобинского

С.Ю. Вернов

ОТФВЭ НИИЯФ МГУ

основан на

V.R. Ivanov, S.V. Ketov, E.O. Pozdeeva, S.Yu. Vernov,
JCAP **2203** (2022) 058 [arXiv:2111.09058]
S.V. Ketov, E.O. Pozdeeva, S.Yu. Vernov,
JCAP **2212** (2022) 032 [arXiv:2211.01546]
E.O. Pozdeeva, S.Yu. Vernov, arXiv:2211.10988

Конференция НИИЯФ МГУ по итогам 2022 года, 06.02.2023

Модель $F(R)$ гравитации

Модели $F(R)$ гравитации описываются следующим действием

$$S_F = \int d^4x \sqrt{-g} F(R), \quad (1)$$

где F — дифференцируемая функция.

Действие $F(R)$ гравитации можно переписать в виде

$$S_\sigma = \int d^4x \sqrt{-g} [F_{,\sigma}(R - \sigma) + F(\sigma)], \quad (2)$$

где σ — скалярное поле без кинетического члена и $F_{,\sigma} = \frac{dF(\sigma)}{d\sigma}$.

Варьируя по σ , получаем $\sigma = R$ и действие (1).

Из действия (2) видно, что модель описывает гравитацию, а не антигравитацию при

$$F_{,\sigma}(\sigma) > 0. \quad (3)$$

Данное условие ограничивает область значений R .

После преобразования Вейля метрики $g_{\mu\nu}^E = \frac{2F_{,\sigma}(\sigma)}{M_{Pl}^2} g_{\mu\nu}$ получаем следующее действие

$$S_E = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_{Pl}^2}{2} R_E - \frac{h(\sigma)}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma - V \right], \quad (4)$$

где

$$h(\sigma) = \frac{3M_{Pl}^2}{2F_{,\sigma}^2} F_{,\sigma\sigma}^2 \quad V(\sigma) = M_{Pl}^4 \frac{F_{,\sigma}\sigma - F}{4F_{,\sigma}^2}. \quad (5)$$

Вводя каноническое скалярное поле ϕ вместо σ

$$\phi = \sqrt{\frac{3}{2}} M_{Pl} \ln \left[\frac{2}{M_{Pl}^2} F_{,\sigma} \right] \quad (6)$$

получаем действие ОТО со стандартным скалярным полем:

$$S_E = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_{Pl}^2}{2} R_E - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]. \quad (7)$$

МОДЕЛЬ R^2 ИНФЛЯЦИИ СТАРОБИНСКОГО

Модель инфляции, предложенная Старобинским
(A.A. Starobinsky, *Phys. Lett. B* **91** (1980) 99.)

$$S_{\text{Star.}} = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R + \frac{1}{6m^2} R^2 \right), \quad (8)$$

имеет только один свободный параметр: массу инфлатона m .

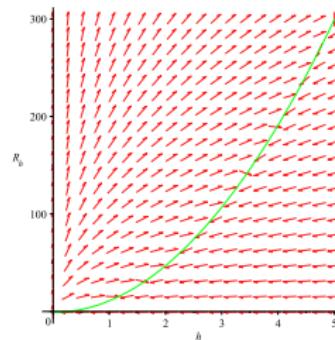
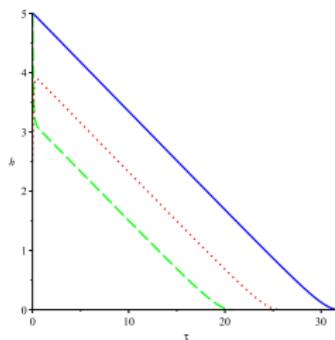


Рис.: Функция $h(\tau) = H(mt)/m$ во время инфляции (слева), и фазовый портрет (R_h, h) , где $R_h = R/m^2$ (справа).

НАБЛЮДАЕМЫЕ ИНФЛЯЦИОННЫЕ ПАРАМЕТРЫ

Современный совокупный анализ данных наблюдений BICEP, Keck Collaboration, P. A. R. Ade *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **127** (2021) 151301, arXiv:2110.00483 [astro-ph.CO]

ограничивает 3 инфляционных параметра:

- Наклон спектра скалярных возмущений $n_s - 1$, где

$$n_s = 0.9649 \pm 0.0042,$$

- Отношение квадратов амплитуд тензорных и скалярных пертурбаций

$$r < 0.036,$$

- Амплитуду спектра скалярных пертурбаций

$$A_s \simeq 2.1 \cdot 10^{-9}$$

для $N_e = 55$.

Модель Старобинского находится в согласии с современными совокупными данными наблюдений

| | | |
|-------|--------|--------|
| n_s | 0.961 | 0.969 |
| r | 0.0043 | 0.0027 |
| N_e | 49.3 | 62.3 |

- 1 Единственный свободный параметр m , фиксируется наблюдаемым значением амплитуды спектра скалярных пертурбаций A_s :

$$m = 1.3 \left(\frac{55}{N_e} \right) 10^{-5} M_{Pl} = 3.2 \left(\frac{55}{N_e} \right) 10^{13} \text{ GeV}, \quad (9)$$

где N_e — число е-фолдингов за время инфляции. Модель хорошо определена при $R > -3m^2$.

- 2 Действие (8) дуально следующему действию ОТО

$$S_E = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_{Pl}^2}{2} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V_{\text{Star.}}(\phi) \right], \quad (10)$$

$$V_{\text{Star.}}(\phi) = V_0 \left[1 - \exp \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{Pl}} \right) \right]^2, \quad V_0 = \frac{3}{4} m^2 M_{Pl}^2. \quad (11)$$

Расширения модели Старобинского

В основном исследуются два варианта обобщения модели Старобинского без добавления материи:

- ❶ Построение однопараметрических семейств моделей $F(R)$ гравитации, включающих модель Старобинского.
- ❷ Добавление поправок, связанных с теорией суперструн.

В 2022 году мы исследовали обе эти возможности.

Модели $F(R)$ гравитации, обобщающие модель Старобинского

Новые однопараметрические расширения модели Старобинского были предложены в наших работах

V.R. Ivanov, S.V. Ketov, E.O. Pozdeeva, S.Yu. Vernov, *JCAP* 2203 (2022) 058 [arXiv:2111.09058]

E.O. Pozdeeva, S.Yu. Vernov, arXiv:2211.10988

Рассмотрим пространственно-плоскую фридмановскую вселенную с интервалом

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2).$$

Число е-фолдингов $N_e = \ln\left(\frac{a_{\text{end}}}{a}\right)$, где a_{end} — значение a в конце инфляции, используется как временной параметр, характеризующий продолжительность инфляции.

Удобно ввести безразмерную переменную

$$y \equiv \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{Pl}}\right) = \frac{M_{Pl}^2}{2F_{,\sigma}} > 0, \quad (12)$$

поскольку она мала во время инфляции.

Потенциал Старобинского имеет вид:

$$V_{\text{Star.}}(y) = V_0 (1 - y)^2. \quad (13)$$

Параметры медленного скатывания выражаются через y :

$$\epsilon = \frac{M_{Pl}^2}{2} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2 = \frac{y^2}{3} \left(\frac{V_{,y}}{V} \right)^2,$$

$$\eta = M_{Pl}^2 \left(\frac{V_{,\phi\phi}}{V} \right) = \frac{2y}{3V} (V_{,y} + yV_{,yy}),$$

$\epsilon = 1$ означает конец инфляции. В приближении медленного скатывания инфляционные параметры имеют следующий вид

$$n_s = 1 - 6\epsilon + 2\eta, \quad r = 16\epsilon. \quad (14)$$

Уравнение медленного скатывания

$$\phi' \simeq \frac{M_{Pl}^2}{V} V_{,\phi} \Leftrightarrow y' = \frac{2y^2 V_{,y}}{3V}. \quad (15)$$

Инфляционные модели с $(R + R_0)^{3/2}$ членом

Рассмотрим следующую модификацию модели Старобинского:

$$F = \frac{M_{Pl}^2}{2} \left[\left(1 - \frac{3}{2}\beta\delta\right)R + \frac{R^2}{6m^2} + \frac{\delta}{m} \left(R + \beta^2 m^2\right)^{3/2} - m^2 \beta^3 \delta \right]. \quad (16)$$

Эта модель содержит 2 безразмерных параметра δ и β . Случай $\beta = 0$ и $\beta \neq 0$ существенно различны.

Функция $F(R)$ имеет правильный предел при $R \ll m^2$:

$$F = \frac{M_{Pl}^2}{2} R \left[1 + \frac{4\beta + 9\delta}{24\beta} \tilde{\sigma} - \frac{\delta}{16\beta^3} \tilde{\sigma}^2 + \frac{3\delta}{128\beta^5} \tilde{\sigma}^3 + \mathcal{O}(\tilde{\sigma}^4) \right],$$

где $\tilde{\sigma} = R/m^2$.

Первая производная

$$F_{,R} = \frac{M_{Pl}^2}{4} (2 - 3\delta\beta) + \frac{M_{Pl}^2}{6m^2} R + \frac{3M_{Pl}^2\delta}{4m} \sqrt{\beta^2 m^2 + R} > \frac{M_{Pl}^2}{2} \quad (17)$$

при всех $R > 0$ и $F_{,R}(0) = M_{Pl}^2/2$, как в модели Старобинского.

Вторая производная $F_{,RR}(R) > 0$ для всех $R > -\beta^2 m^2$ и $\delta \geq 0$.

Если $\beta \neq 0$ и $\delta > 0$, то модель хорошо определена для всех $R > R_{min}$, где $R_{min} < 0$.

При $\beta = 0$ и $\delta > 0$ модель хорошо определена для всех $R \geq 0$.

Чтобы получить инфляционные параметры мы построили потенциал (5):

$$V(\tilde{\sigma}) = \frac{4V_0 \left(6\beta^3\delta + 3\delta\sqrt{\beta^2 + \tilde{\sigma}} (\tilde{\sigma} - 2\beta^2) + \tilde{\sigma}^2 \right)}{\left(9\delta\beta - 9\delta\sqrt{\beta^2 + \tilde{\sigma}} - 2\tilde{\sigma} - 6 \right)^2}, \quad (18)$$

Чтобы получить $V(y)$, мы решаем (12):

$$y + \frac{6}{9\delta\beta - 9\delta\sqrt{\beta^2 + \tilde{\sigma}} - 2\tilde{\sigma} - 6} = 0, \quad (19)$$

и получаем

$$\tilde{\sigma}_{\pm} = \frac{3(1-y)}{y} + \frac{9\delta}{8y} (4\beta y + 9\delta y \pm s), \quad (20)$$

где $s = \sqrt{(72\delta\beta + 81\delta^2 + 16\beta^2 - 48)y^2 + 48y}$.

Условие $\tilde{\sigma} = 0$ при $y = 1$ для всех δ и β , даёт решение $\tilde{\sigma}_-$.

Однопараметрическое расширение модели Старобинского

Пусть $\beta = \sqrt{3} - \frac{9}{4}\delta$.

$$\sigma(y) = -\frac{3}{2y} \left(3\delta\sqrt{3y} - 3\sqrt{3}\delta y + 2y - 2 \right). \quad (21)$$

Потенциал имеет простой вид:

$$V(y) = V_0(y-1)^2 - \sqrt{3}V_0\delta\sqrt{y}(\sqrt{y}+2)(\sqrt{y}-1)^2 \quad (22)$$

что в терминах ϕ даёт

$$V(\phi) = V_{\text{Star.}} + \sqrt{3}V_0\delta e^{-\phi/(\sqrt{6}M_{Pl})} \left(e^{-\phi/(\sqrt{6}M_{Pl})} + 2 \right) \left(e^{-\phi/(\sqrt{6}M_{Pl})} - 1 \right)^2.$$

Потенциал $V(y)$ имеет экстремум в точке

$$y_{\text{extr}} = \frac{\sqrt{3} - 6\delta + \sqrt{3 - 12\sqrt{3}\delta + 27\delta^2}}{2(\sqrt{3} - 3\delta)}. \quad (23)$$

Положительный потенциал без точки экстремума на интервале $0 < y < 1$ получается при $\delta \leq 4\sqrt{3}/9$, что равносильно $\beta \geq 0$.

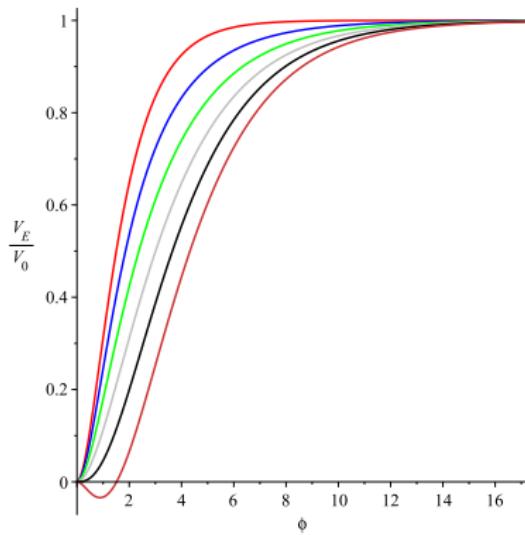
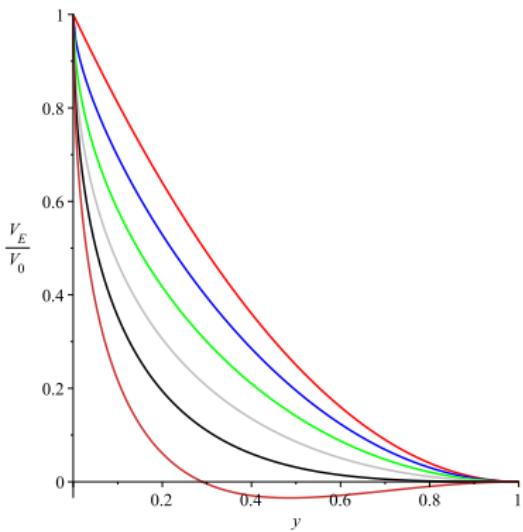


Рис.: Потенциалы $V(y)$ (слева) и $V(\phi)$ (справа) в случае $\beta = \sqrt{3} - \frac{9}{4}\delta$ для $\delta = 0$ (красный), $\delta = \sqrt{3}/9$ (синий), $\delta = 2\sqrt{3}/9$ (зелёный), $\delta = \sqrt{3}/3$ (серый), $\delta = 4\sqrt{3}/9$ (чёрный) и $\delta = 1$ (оранжевый).

Специальный случай $\delta = 1/\sqrt{3}$

При $\delta = 1/\sqrt{3}$ и $\beta = \sqrt{3}/4$ потенциал имеет вид

$$V(y) = V_0(1 - \sqrt{y})^2, \quad V(\phi) = V_0 \left(1 - e^{-\phi/(\sqrt{6}M_{Pl})}\right)^2. \quad (24)$$

Инфляционные параметры равны

$$n_s = 1 - \frac{2\sqrt{y}(\sqrt{y} + 1)}{3(\sqrt{y} - 1)^2}, \quad r = \frac{16y}{3(1 - \sqrt{y})^2}. \quad (25)$$

Условие $\epsilon(y_{\text{end}}) = 1$ при $y_{\text{end}} < 1$ даёт $y_{\text{end}} = \frac{1}{4}(3 - \sqrt{3})^2$.

Уравнение эволюции в приближении медленного скатывания (15),

$$y' = \frac{2y^{3/2}}{3(\sqrt{y} - 1)} \quad (26)$$

позволяет выразить N_e через y :

$$N_e = \frac{3}{\sqrt{y}} + \frac{3}{2} \ln(y) + N_0. \quad (27)$$

Мы вычислили значение y_{in} для подходящего значения n_s , а именно для $n_s = 0.961$, $n_s = 0.965$ и $n_s = 0.969$. Это позволило вычислить соответствующие значения r и число е-фолдингов во время инфляции.

Таблица: Значения y , N_e и r , соответствующие $n_s = 0.961$, $n_s = 0.965$ и $n_s = 0.969$, а также y_{end} для некоторых значений δ .

| δ | 0 | 0.1 | $\frac{\sqrt{3}}{9}$ | $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ |
|---------------------|--------|---------|----------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|
| y_{end} | 0.464 | 0.460 | 0.455 | 0.439 | 0.402 | 0.299 |
| $y_{in, n_s=0.961}$ | 0.0140 | 0.0114 | 0.00895 | 0.00479 | 0.00253 | 0.00146 |
| $y_{in, n_s=0.965}$ | 0.0126 | 0.0101 | 0.00777 | 0.00402 | 0.00209 | 0.00120 |
| $y_{in, n_s=0.969}$ | 0.0112 | 0.00878 | 0.00660 | 0.00329 | 0.00168 | 0.000968 |
| $N_e, n_s=0.961$ | 49.3 | 45.2 | 44.0 | 45.3 | 47.4 | 48.1 |
| $N_e, n_s=0.965$ | 55.0 | 50.4 | 49.1 | 50.7 | 53.0 | 53.8 |
| $N_e, n_s=0.969$ | 62.3 | 57.0 | 55.6 | 57.6 | 60.1 | 60.9 |
| $r_{n_s=0.961}$ | 0.0043 | 0.0074 | 0.010 | 0.014 | 0.015 | 0.015 |
| $r_{n_s=0.965}$ | 0.0035 | 0.0061 | 0.0084 | 0.0114 | 0.012 | 0.012 |
| $r_{n_s=0.969}$ | 0.0027 | 0.0049 | 0.0068 | 0.0091 | 0.0097 | 0.0098 |

Модель с поправкой, мотивированной теорией струн

Поправка связанная с теорией суперструн исследовалась в работе
S.V. Ketov, E.O. Pozdeeva, S.Yu. Vernov,

JCAP 2212 (2022) 032 [arXiv:2211.01546]

Инфляция рассматривалась в модели, описываемой действием

$$S_{\text{SBR}} = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R + \frac{1}{6m^2} R^2 - \frac{\beta}{8m^6} T^{\mu\nu\lambda\rho} T_{\mu\nu\lambda\rho} \right] ,$$

где безразмерная константа $\beta > 0$ и $T^{\mu\nu\lambda\rho} T_{\mu\nu\lambda\rho}$ — квадрат тензора Бела-Робинсона (Bel-Robinson).

$$T^{\mu\nu\lambda\rho} T_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{1}{4} (P_4^2 - \mathcal{G}^2) ,$$

\mathcal{G} — член Гаусса-Бонне, P_4 — плотность Понтрягина.

Модель с поправкой, мотивированной теорией струн

В результате получено, что наблюдательные ограничения для n_s выполняются только при $\beta \leqslant 3.9 \cdot 10^{-6}$.

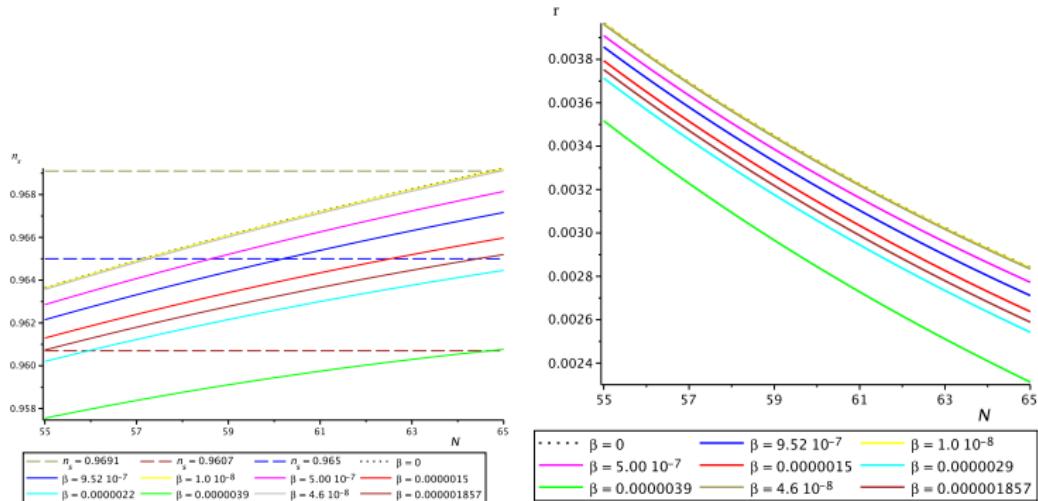


Рис.: Спектральный индекс n_s отношение квадратов амплитуд тензорных и скалярных пертурбаций при $0 \leqslant \beta \leqslant 3.9 \cdot 10^{-6}$ и $55 \leqslant N \leqslant 65$.

РЕЗУЛЬТАТЫ

- ❶ В 2022 годы нами изучены различные однопараметрические расширения модели инфляции Старобинского, которые, как и сама модель Старобинского, удовлетворяют всем современным наблюдательным ограничениям на инфляционные параметры. Исследованы два варианта обобщения модели Старобинского: построение однопараметрических семейств моделей $F(R)$ гравитации, включающих модель Старобинского, и добавление поправок, связанных с теорией суперструн.
- ❷ Рассмотрена модификация $R + R^2$ гравитации с суперструнной поправкой, которая может быть рассмотрена в качестве ведущей квантовой поправки и представима в четырёх измерениях, как квадрат тензора Бела-Робинсона, помноженный на положительный параметр β . При исследовании инфляции квадрат тензора Бела-Робинсона эквивалентен квадрату члена Гаусса-Бонне.
Из требований отсутствия духов и согласованности полученных значений инфляционных параметров с измерениями космического микроволнового фонового излучения найдена физически допустимая область значений параметра β .

РЕЗУЛЬТАТЫ

При построении инфляционных моделей $F(R)$ гравитации было наложено требование, чтобы как скалярный потенциал инфлатона в формулировке Эйнштейна, так и гравитационная функция $F(R)$, где R — скаляр Риччи, выражались в терминах элементарных функций. Для модификации модели Старобинского, в действие добавлялись члены, пропорциональные R^4 , R^3 , или $R^{3/2}$, и вычислялись соответствующие скалярные потенциалы и инфляционные параметры. Также была изучена модель с добавлением члена $(R + R_0)^{3/2}$.

Получено, что добавление члена, пропорционального $R^{3/2}$ или $(R + R_0)^{3/2}$, позволяет увеличить значение инфляционного параметра r , определяющего отношение квадратов амплитуд тензорных и скалярных пертурбаций, в четыре раза по сравнению со значением этого параметра в модели Старобинского.

В настоящее время известна только верхняя граница значения параметра r , которая выше максимального полученного значения примерно в два раза.

РЕЗУЛЬТАТЫ

При построении инфляционных моделей $F(R)$ гравитации было наложено требование, чтобы как скалярный потенциал инфлатона в формулировке Эйнштейна, так и гравитационная функция $F(R)$, где R — скаляр Риччи, выражались в терминах элементарных функций. Для модификации модели Старобинского, в действие добавлялись члены, пропорциональные R^4 , R^3 , или $R^{3/2}$, и вычислялись соответствующие скалярные потенциалы и инфляционные параметры. Также была изучена модель с добавлением члена $(R + R_0)^{3/2}$.

Получено, что добавление члена, пропорционального $R^{3/2}$ или $(R + R_0)^{3/2}$, позволяет увеличить значение инфляционного параметра r , определяющего отношение квадратов амплитуд тензорных и скалярных пертурбаций, в четыре раза по сравнению со значением этого параметра в модели Старобинского.

В настоящее время известна только верхняя граница значения параметра r , которая выше максимального полученного значения примерно в два раза.

Спасибо за внимание