

Квантовая теория поля в пространстве-времени Шварцшильда

И.П. Волобуев, В.О. Егоров, С.И. Кейзеров, Э.Р. Рахметов,
М.Н. Смоляков

ОТФВЭ, ОЭФВЭ

Доклад основан на работах:

- 1 V. Egorov, M. Smolyakov, I. Volobuev, "Doubling of physical states in the quantum scalar field theory for a remote observer in the Schwarzschild spacetime", Phys. Rev. D **107** (2023) 025001 [arXiv:2209.02067 [gr-qc]]
- 2 И.П. Волобуев, В.О. Егоров, М.Н. Смоляков, "Каноническое квантование массивного скалярного поля в пространстве-времени Шварцшильда", Письма в ЭЧАЯ **20** (2023) 298
- 3 M. Smolyakov, "Asymptotic behavior of solutions and spectrum of states in the quantum scalar field theory in the Schwarzschild spacetime", Phys. Rev. D **108** (2023) 105006 [arXiv:2309.06249 [gr-qc]]
- 4 И.П. Волобуев, С.И. Кейзеров, Э.Р. Рахметов, "Точные решения для массивного скалярного поля в гравитационном поле черной дыры Шварцшильда", Физмат **1** (2023) 75
- 5 V. Egorov, M. Smolyakov, I. Volobuev, "Quantization of spinor field in the Schwarzschild spacetime and spin sums for solutions of the Dirac equation", Class. Quant. Grav. **41** (2024) 045002 [arXiv:2309.06897 [gr-qc]]

КТП в присутствии черной дыры (эффект Хокинга):

- D.G. Boulware, “*Quantum Field Theory in Schwarzschild and Rindler Spaces*”, Phys. Rev. D **11** (1975) 1404
(Boulware vacuum)
- J.B. Hartle, S.W. Hawking, “*Path-integral derivation of black-hole radiance*”, Phys. Rev. D **13** (1976) 2188
(Hartle-Hawking vacuum)
- W. Israel, “*Thermo-field dynamics of black holes*”, Phys. Lett. A **57** (1976) 107
- W.G. Unruh, “*Notes on black hole evaporation*”, Phys. Rev. D **14** (1976) 870
(Unruh vacuum)
W.G. Unruh, “*Origin of the particles in black hole evaporation*”, Phys. Rev. D **15** (1977) 365

- S.A. Fulling, “*Alternative Vacuum States in Static Space-Times with Horizons*”, J. Phys. A **10** (1977) 917
- S. M. Christensen, S.A. Fulling, “*Trace anomalies and the Hawking effect*”, Phys. Rev. D **15** (1977) 2088
- P. Candelas, “*Vacuum Polarization in Schwarzschild Space-Time*”, Phys. Rev. D **21** (1980) 2185
- D.W. Sciama, P. Candelas, D. Deutsch, “*Quantum field theory, horizons and thermodynamics*”, Adv. Phys. **30** (1981) 327

Квантовая теория над горизонтом черной дыры:

- G. 't Hooft, *"Virtual black holes and space-time structure"*, Found. Phys. **48** (2018) 1134
- G. 't Hooft, *"The quantum black hole as a theoretical lab, a pedagogical treatment of a new approach"*, arXiv:1902.10469 [gr-qc]
- G. 't Hooft, *"Quantum clones inside black holes"*, arXiv:2206.04608 [gr-qc]
- E.T. Akhmedov, P.A. Anempodistov, K.V. Bazarov, D.V. Diakonov, U. Moschella, *"Heating up an environment around black holes and inside de Sitter space"*, Phys. Rev. D **103** (2021) 025023 [arXiv:2010.10877 [hep-th]]
- P.A. Anempodistov, *"Remarks on the thermofield double state in 4D black hole background"*, Phys. Rev. D **103** (2021) 105008 [arXiv:2012.03305 [hep-th]]
- K.V. Bazarov, *"Notes on peculiarities of quantum fields in space-times with horizons"*, Class. Quant. Grav. **39** (2022) 217001 [arXiv:2112.02188 [hep-th]]

Действительное массивное скалярное поле

$$S = \int \mathcal{L} d^4x = \int \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{M^2}{2} \phi^2 \right) d^4x.$$

Метрика Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_0}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

где r_0 – радиус Шварцшильда. Так как метрика статическая, уравнение движения для скалярного поля принимает вид

$$\sqrt{-g} g^{00} \ddot{\phi} + \partial_i (\sqrt{-g} g^{ij} \partial_j \phi) + M^2 \sqrt{-g} \phi = 0.$$

$$e^{\pm iEt} \phi_{lm}(E, \vec{x}) = e^{\pm iEt} Y_{lm}(\theta, \varphi) f_l(E, r),$$

где

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi},$$

$$l = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

что приводит к уравнению для радиальной части решения

$$E^2 \frac{r}{r-r_0} f_l(E, r) - M^2 f_l(E, r) + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r(r-r_0) \frac{df_l(E, r)}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} f_l(E, r) = 0.$$

Введем новые безразмерные переменные

$$\mu = Mr_0, \quad \epsilon = Er_0, \quad z = \frac{r}{r_0} + \ln \left(\frac{r}{r_0} - 1 \right)$$

и новую функцию

$$\psi_l(\epsilon, z) = r f_l(E, r).$$

В этих переменных радиальное уравнение может быть приведено к виду одномерного уравнения Шредингера

$$-\frac{d^2 \psi_l(\epsilon, z)}{dz^2} + V_l(z) \psi_l(\epsilon, z) = \epsilon^2 \psi_l(\epsilon, z),$$

где потенциал имеет вид

$$V_l(z) = \frac{r(z) - r_0}{r(z)} \left(\mu^2 + \frac{l(l+1)r_0^2}{r^2(z)} + \frac{r_0^3}{r^3(z)} \right).$$

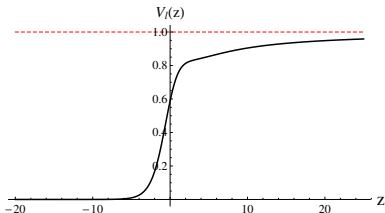
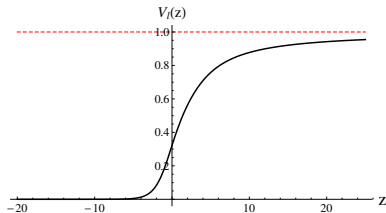


Рис. 1: $V_l(z)$ для $\mu = 1$: $l = 0$ (левый график) и $l = 1$ (правый график).

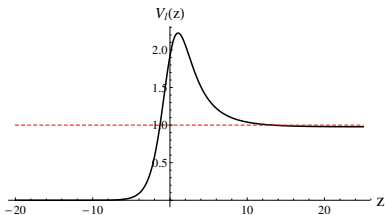
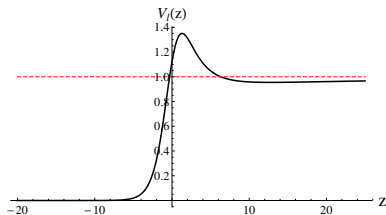


Рис. 2: $V_l(z)$ для $\mu = 1$: $l = 2$ (левый график) и $l = 3$ (правый график).

$$V_I(z) \approx \mu^2 \left(1 - \frac{1}{z}\right) \quad \text{при } z \rightarrow \infty$$

$0 < \epsilon < \mu \Rightarrow \psi_I(\epsilon, z)$ (одно решение),

$\mu < \epsilon \Rightarrow \psi_{Ip}(q, z), p = 1, 2, q = \sqrt{\epsilon^2 - \mu^2}$ (два решения).

Эти решения составляют полную ортонормированную систему собственных функций.

Обычно используют решения в виде (безмассовое скалярное поле)

$$\psi_{I1}(\epsilon, z) \sim e^{i\epsilon z} + R_{I1}e^{-i\epsilon z}, \quad z \rightarrow -\infty,$$

$$\psi_{I1}(\epsilon, z) \sim T_{I1}e^{i\epsilon z}, \quad z \rightarrow \infty,$$

$$\psi_{I2}(\epsilon, z) \sim T_{I2}e^{-i\epsilon z}, \quad z \rightarrow -\infty,$$

$$\psi_{I2}(\epsilon, z) \sim e^{-i\epsilon z} + R_{I2}e^{i\epsilon z}, \quad z \rightarrow \infty.$$

При $\epsilon > \mu$ асимптотики двух линейно независимых решений могут быть записаны в виде

$$\psi_{lp}(q, z) = C_{lp}^+(q) \sin \left(qz + \frac{\mu^2}{2q} \ln(z) + \kappa_{lp}(q) \right) \quad \text{при } z \rightarrow \infty,$$
$$\psi_{lp}(q, z) = C_{lp}^-(q) \sin(\epsilon z + \gamma_{lp}(q)) \quad \text{при } z \rightarrow -\infty.$$

Можно показать, что $C_{lp}^+(q)$ и $C_{lp}^-(q)$ могут быть выбраны в виде

$$C_{lp}^+(q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad C_{lp}^-(q) = \sqrt{\frac{q}{\pi \sqrt{q^2 + \mu^2}}}.$$

$z \rightarrow r$

При $r \rightarrow \infty$

$$f_{lp}(k, r) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \sin \left(kr + \frac{(2k^2 + M^2)r_0}{2k} \ln(kr) - \frac{\pi l}{2} + \tilde{\delta}_{lp}(k) \right),$$

где $k = \frac{q}{r_0}$ и $\tilde{\delta}_{lp}(k) = \kappa_{lp}(kr_0) - \frac{(2k^2 + M^2)r_0}{2k} \ln(kr_0) + \frac{\pi l}{2}$ есть фазовые сдвиги.

В работе

И.П. Волобуев, С.И. Кейзеров, Э.Р. Рахметов, “Точные решения для массивного скалярного поля в гравитационном поле черной дыры Шварцшильда”, Физмат **1** (2023) 75
показано, что точные решения радиального уравнения выражаются через конфлюэнтные (вырожденные) функции Гойна.

Выбор квантовых состояний. Шаг 1

$$\phi_p(\vec{k}, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i(\frac{\pi l}{2} + \tilde{\delta}_{lp}(k))} P_l \left(\frac{\vec{k}\vec{x}}{kr} \right) f_{lp}(k, r),$$

где $k = |\vec{k}|$, $r = |\vec{x}|$, $\vec{n} = \frac{\vec{x}}{r}$, $p = 1, 2$. При больших r

$$\phi_p(\vec{k}, \vec{x}) \approx \frac{1}{\sqrt{2}(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(e^{i\left(\vec{k}\vec{x} - \frac{(2k^2 + M^2)r_0}{2k} \ln(kr)\right)} + A_p(\vec{k}, \vec{n}, r) \frac{e^{ikr}}{r} \right),$$

$$A_p(\vec{k}, \vec{n}, r) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l \left(\frac{\vec{k}\vec{x}}{kr} \right) \times \left(e^{i\left(2\tilde{\delta}_{lp}(k) + \frac{(2k^2 + M^2)r_0}{2k} \ln(kr)\right)} - e^{-i\frac{(2k^2 + M^2)r_0}{2k} \ln(kr)} \right).$$

Выбор квантовых состояний. Шаг 2

$$\phi_{\pm}(\vec{k}, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\phi_1(\vec{k}, \vec{x}) \pm \phi_2(\vec{k}, \vec{x}) \right)$$

Можно показать, что решения $\phi_{\pm}(\vec{k}, \vec{x})$ вместе с решениями при $E < M$ образуют полную ортонормированную систему собственных функций. При больших r

$$\begin{aligned} \phi_+(\vec{k}, \vec{x}) &\approx \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\left(\vec{k}\vec{x} - \frac{(2k^2 + M^2)r_0}{2k} \ln(kr)\right)} \\ &\quad + \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(A_1(\vec{k}, \vec{n}, r) + A_2(\vec{k}, \vec{n}, r) \right) \frac{e^{ikr}}{r}, \\ \phi_-(\vec{k}, \vec{x}) &\approx \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(A_1(\vec{k}, \vec{n}, r) - A_2(\vec{k}, \vec{n}, r) \right) \frac{e^{ikr}}{r}. \end{aligned}$$

В частности, при $r \rightarrow \infty$

$$\phi_+(\vec{k}, \vec{x}) \approx \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\left(\vec{k}\vec{x} - \frac{(2k^2 + M^2)r_0}{2k} \ln(kr)\right)}, \quad \phi_-(\vec{k}, \vec{x}) \approx 0.$$

$$\begin{aligned}
 \phi(t, \vec{x}) = & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \int_0^M \frac{dE}{\sqrt{2E}} \left(e^{-iEt} \phi_{lm}(E, \vec{x}) a_{lm}(E) + \text{h.c.} \right) \\
 & + \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\sqrt{k^2 + M^2}}} \left(e^{-i\sqrt{k^2 + M^2}t} \phi_{-}(\vec{k}, \vec{x}) b(\vec{k}) + \text{h.c.} \right) \\
 & + \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\sqrt{k^2 + M^2}}} \left(e^{-i\sqrt{k^2 + M^2}t} \phi_{+}(\vec{k}, \vec{x}) a(\vec{k}) + \text{h.c.} \right),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] &= \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'), \\
 [b(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] &= \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}').
 \end{aligned}$$

Каноническая координата есть

$$\phi(t, \vec{x}).$$

Канонически сопряженный импульс есть

$$\pi(t, \vec{x}) = \sqrt{-g(\vec{x})}g^{00}(\vec{x})\dot{\phi}(t, \vec{x}).$$

Можно показать, что выполняются канонические коммутационные соотношения:

$$[\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}),$$

$$[\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})] = 0,$$

$$[\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] = 0.$$

Гамильтониан системы имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \int \sqrt{-g} g^{00} T_{00} d^3x = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} g^{00} (\dot{\phi}^2 - \ddot{\phi}\phi) d^3x \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \int_0^M E a_{lm}^\dagger(E) a_{lm}(E) dE \\ &\quad + \int \sqrt{k^2 + M^2} (b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k}) + a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k})) d^3k. \end{aligned}$$

Для сравнения, гамильтониан квантованного массивного скалярного поля в пространстве Минковского имеет вид

$$H = \int \sqrt{k^2 + M^2} a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) d^3k.$$

- В области над горизонтом черной дыры Шварцшильда можно построить последовательную и непротиворечивую КТП.
- Дополнительное вырождение – это чисто топологический эффект (топологическая структура пространства-времени Шварцшильда есть $R^2 \times S^2$, а пространства Минковского – R^4). В частности, вырождение отсутствует в случае компактного объекта.
- Аналогичное вырождение состояний ожидается и в случае полей других типов. В частности, квантовая теория в случае спинорного поля рассмотрена в работе V. Egorov, M. Smolyakov, I. Volobuev, “Quantization of spinor field in the Schwarzschild spacetime and spin sums for solutions of the Dirac equation”, Class. Quant. Grav. **41** (2024) 045002 [arXiv:2309.06897 [gr-qc]].