

# Компьютерная алгебра

Виктор Еднерал

Лаборатория аналитических вычислений  
отдела теоретической физики высоких энергий  
НИИ ядерной физики имени Д.В. Скобельцына  
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова  
edneral@theory.sinp.msu.ru

Российский университет дружбы народов  
edneral-vf@rudn.ru

18 ноября 2021

# План презентации

- Как возникла компьютерная алгебра (КА)
- Для чего применяется компьютерная алгебра
- Примеры алгоритмов и систем
- Компьютерная алгебра и нейронные сети?

## Предтечи

Если исключить Лапугу Джонатана Свифта, предсказавшего появление **символьного программирования**, которое включает в себя **компьютерную алгебру**, идеология КА была сформулирована еще в 1844 году, британским математиком леди Адой Аугустой Лавлейс (дочерью Байрона) в связи с проектом механической вычислительной машины Чарлза Бэббиджа.

Реальное развитие КА началось более ста лет спустя после появления первых достаточно мощных ЭВМ. В 1953 году американцы Kahriman и Nolan в США и Канторович в СССР реализовали операцию дифференцирования полиномов.

## Задачи, решенные в XIX веке вручную

Прежде чем на сцене появился компьютер, вычисления представляли смесь численного счета с тем, что будем называть "алгебраическими вычислениями т.е. с операциями над математическими формулами.

Знаменитые великие вычисления XIX века содержат большое количество манипуляций с формулами.

Наиболее известным является, несомненно, расчет Леверье орбиты **Нептуна**, который был основан на возмущениях орбиты Урана и привел к открытию этой планеты.

# Аналитическая теория движения Луны Делоне.

## Ограниченная задача 3х тел

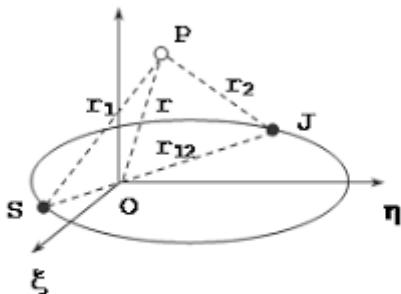


Рис. 1.  
Ограниченная задача 3-х тел

Делоне потребовалось 10 лет для вычисления орбиты Луны и еще 10 лет для ее проверки. Результат не является численным, поскольку он состоит в основном из формулы, которая сама по себе занимает 128 страниц 4-й главы его книги.

## Современные задачи

- Ограниченная задача 3-х тел в приложении к спутниковой тематике. В 60-х годах на языке ассемблера машины IBM-360 была написана система **MAO** (Mechanized Algebraic Operations). Она была предназначена для работы с рядами Пуассона с 10-ю полиномиальными и 6-ю тригонометрическими переменными. За год была проверена работа Делоне, найдено 4 опечатки.
- Ароматические соединения. Система Dendron. Ныне эту схему следует отнести к символьному программированию.
- Задачи биоинформатики.
- Вычисления в физике высоких энергий. Система **CompNER**.
- Н. Н. Васильев, В. П. Гердт, В. Ф. Еднерал, Д. В. Ширков. Компьютерная алгебра в научных и инженерных приложениях // Программирование. — 1996. — Т. 22, № 6. — С. 296–306.

# Рекордные вычисления

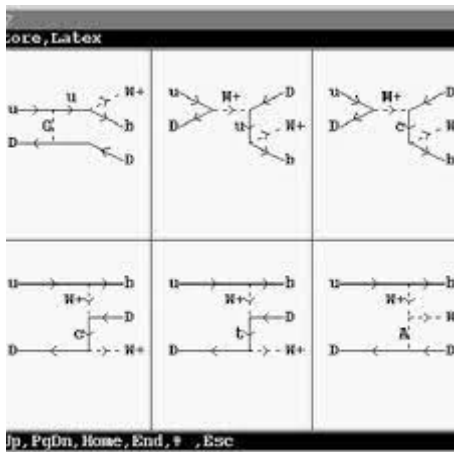
- Завершение классификации простых групп. Группа “монстр Фишера — Гриса” — спорадическая простая группа порядка

$$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 = \\ = 808\,017\,424\,794\,512\,875\,886\,459\,904\,961\,710\,757\,005\,754\,368\,000\,000\,000 \approx 8,08 \cdot 10^{53}.$$

и может быть описана как группа автоморфизмов некоторой алгебры размерности 196884. Вычисления, которые необходимо было провести для построения и анализа свойств этой замечательной группы было бы очень трудно провести без использования компьютера.

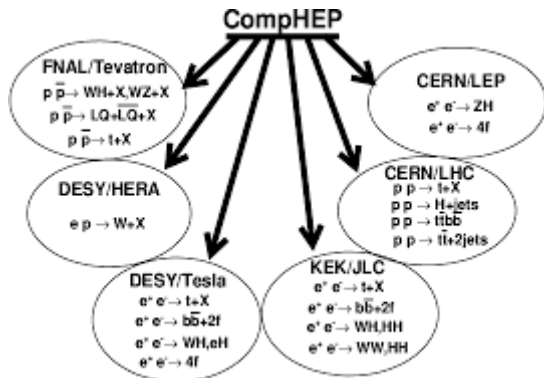
- Вычисление аномального магнитного момента электрона.

# СотрНЕР - разработка ОТФВЭ НИИЯФ





# Применение CompHEP



# Журнал и основные конференции

- Начиная с 1985 г. издается специализированный Journal of Symbolic Computation (JSC)
- ISSAC (International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation)
- ACA (Applications of Computer Algebra)
- CASC (Computer Algebra in Scientific Computing)
- PCA Polynomial Computer Algebra (PCA)

# Универсальные системы компьютерной алгебры

- Свободно распространяемые
  - ▶ wxMAXIMA
  - ▶ REDUCE
  - ▶ AXIOM
- Коммерческие системы
  - ▶ MAGMA
  - ▶ MAPLE
  - ▶ MATHEMATICA

# Новые алгоритмы

- Символьное интегрирование. 1969 год. Алгоритм Риша
- Факторизация полиномов. 1967 год. Алгоритм Берлекэмпа
- Решение систем алгебраических уравнений. 1972 ? год.  
Алгоритм Бушбергера

## Учебные курсы

В конце 70-х годов наша лаборатория (ЛАВФВЭ) получила из ОИЯИ систему аналитических вычислений REDUCE и с начала 80-х мы организовали практикум для студентов и сотрудников кафедры Физики высоких энергий.

В. Ф. Еднерал, А. П. Крюков, А. Я. Родионов. Язык аналитических вычислений REDUCE. — Изд-во Московского университета, Москва, 1989. — 176 с.

С 2012 года я читаю курс по алгоритмам компьютерной алгебры в Российском университете дружбы народов.

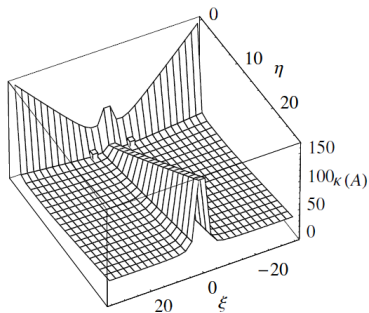
## Об автоматической генерации оптимальных схем для решения уравнений в частных производных

В качестве примера отмечу статью Евгения Ворожцова и Василия Шарпеева [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-26831-2\\_28](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-26831-2_28), где для

повышения точности расчетов методом CLS обобщением метода применяется подход неоднородной логически прямоугольной сетки. В основные рабочие формулы метода CLS на неоднородной сетке, получаются с помощью системы компьютерной алгебры Mathematica. Предлагаемый метод был применен для численного

решения двумерных стационарных уравнений Навье – Стокса, описывающие ламинарные течения вязкой несвязанной сжимаемой жидкости. На гладком тестовом решении применение неравномерной сетки позволило снизить погрешность решения в 47 раз по сравнению со случаем однородной сетки.

The application of such a non-uniform grid has enabled an increase in the accuracy of the numerical solution by the CLS method by the factor of 3.05 in comparison with the case of a uniform grid with the same number of cells (in both cases, the grid of  $40 \times 40$  cells was used).



**Fig. 1.** Surface  $\kappa = \kappa(A(\xi, \eta))$  obtained at  $\text{Re} = 1000$ ,  $c_{1L} = c_{1R} = 0.4$ ,  $c_{2bot} = 1$ ,  $c_{2top} = 0.35$

- Какие задачи алгебраического характера сформулированы для нейронных сетей?
- Интересна ли автоматическая генерация программного обеспечения для нейронных сетей в режиме реального времени?



Спасибо за внимание