Экспериментальное исследование интегрируемости автономных систем ОДУ с зависящей от параметров полиномиальной правой частью

Виктор Еднерал

НИИ ядерной физики имени Д.В. Скобельцына
Лаборатория аналитических вычислений в физике высоких энергий
ОТФВЭ

26 февраля 2024

Интегрируемость

Для автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\frac{d\,x_i}{d\,t} = \phi_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n,$$

первым интегралом называется дифференцируемая функция $I_k(x_1, \ldots, x_n)$, чья производная по направлению векторного поля обращается в ноль

$$\left.\frac{d\,I_k(x_1, \ldots, x_n)}{d\,t}\right|_{\frac{d\,x_i}{d\,t} = \phi_i(x_1,\ldots,x_n)} = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

- Система называется интегрируемой, если число таких независимых первых интегралов m достаточно велико.
- Для интегрируемости двумерной системы достаточно иметь один первый интеграл.

Простой пример

- Рассмотрим уравнение гармонического осциллятора

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = 0.$$

- Это уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = & y(t), \\ \dot{y}(t) = & -\omega_0^2 \cdot x(t). \end{cases}$$

- Первым интегралом такой системы будет

$$I(x(t), y(t)) = x^2(t) + y^2(t)/\omega_0^2.$$

- Действительно, его производная по времени равна нулю в силу уравнений системы выше

$$\frac{d\, I(x(t), y(t))}{d\, t} = 2x(t)\dot{x}(t) + 2y(t)\dot{y}(t)/\omega_0^2 = 2x(t)y(t) - 2x(t)y(t) = 0$$

Решение интегрируемой системы

Из постоянства первого интеграла вдоль линии уровня

$$I(x(t), y(t)) = C_1^2,$$

получаем

$$y(t) = \pm\sqrt{\omega_0^2 \cdot (C_1^2 - x^2(t))}.$$

Исключая $y(t)$, понижаем размерность системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = \pm\sqrt{\omega_0^2 \cdot (C_1^2 - x^2(t))}$$

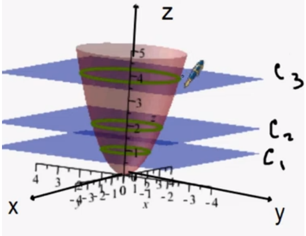
и решаем эту систему в квадратурах, поскольку переменные систеиы делятся

$$\frac{dx(t)}{\sqrt{C_1 - x^2(t)}} = \pm\omega_0 \cdot dt, \quad \text{i.e.}\ \arcsin(x(t)/C_1) = \pm\omega_0 \cdot t + C_2.$$

Получаем, наконец, $x(t) = C_1 \cdot \sin(\pm\omega_0 \cdot t + C_2)$.

- Интегрируемость очень полезное свойство. В частности, интегрируемая система разрешима в квадратурах.
- Знание первых интегралов очень полезно при построении симплектических схем численного интегрирования, для исследовании фазовых портретов и т.п.

Например, наличие у интеграла локального экстремума свидетельствует о наличии замкнутых линий уровня, т.е. о существовании в окрестности экстремума семейств ограниченных в фазовом пространстве решений, включая периодические решения:



Локальный анализ и резонансная нормальная форма

- Метод резонансной нормальной формы был предложен H. Poincaré для локального анализа систем нелинейных дифференциальных уравнений. Он основан на максимальном упрощении правых частей этих систем обратимыми преобразованиями в окрестрости неподвижной точки.
- Метод нормальной формы был развит в работах G.D. Birkhoff, T.M. Cherry, A. Deprit, F.G. Gustavson, C.L. Siegel, J. Moser, A.D. Bruno и других математиков. Настоящая работа основана на работах по локальному анализу профессора А.Д. Брюно [Bruno 1971, 1972, 1979, 1989, 1998].

Локальный анализ

- Основная идея локального анализа - исследование системы обыкновенныз дифференциальных уравнений в окрестности неподвижных точек на фазовой плоскости.
- Фазовая плоскросность это плоскость переменных системы ОДУ, например плоскость переменных координата/скорость в механике.
- Неподвижгая точка - точка, где правые части уравнений системы обращаются в ноль, т.е. равны нулю все производные по времени.

Фазовый портрет в окрестности неподвижной точки

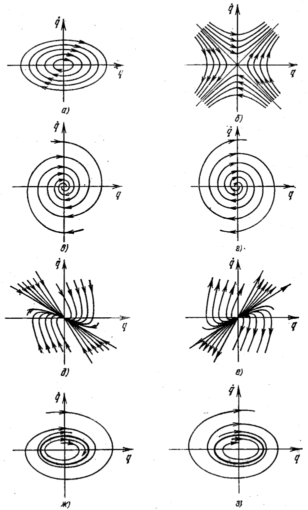


Рис. 17.17. Особые точки на фазовой плоскости; *а*) центр, *б*) седло; *в*) фокус (устойчивый). *г*) фокус (неустойчивый); *д*) узел (устойчивый); *е*) узел (неустойчивый); *ж*, *з*) изолированные циклы (устойчивый и неустойчивый). Об устойчивости и неустойчивости см. ниже.

Система Баутина

Поиск интегрируемых случаев мы продемонстрируем на примере системы с квадратичной правой частью. Эта система была исследована Баутином на предмет определения числа малых предельных циклов в квадратичной системе [Баутин 1952]

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \alpha\tilde{x}(t) + \beta\tilde{y}(t) + \tilde{a}_1\tilde{x}^2(t) + \tilde{a}_2\tilde{x}(t)\tilde{y}(t) + \tilde{a}_3\tilde{y}^2(t),$$

$$\frac{d\tilde{y}(t)}{dt} = \gamma\tilde{x}(t) + \delta\tilde{y}(t) + \tilde{b}_1\tilde{x}^2(t) + \tilde{b}_2\tilde{x}(t)\tilde{y}(t) + \tilde{b}_3\tilde{y}^2(t),$$

где $\tilde{x}(t)$ и $\tilde{y}(t)$ зависимые от времени переменные. Приведем

линейную часть этой системы к жордановой форме

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda_1 x + \sigma\, y + a_1 x^2 + a_2\, x\, y + a_3 y^2, \\ \dot{y} &= \qquad\quad \lambda_2\, y + b_1 x^2 + b_2\, x\, y + b_3 y^2. \end{aligned}$$

Мы опустили здесь зависимость переменных от времени и обозначили производную по времени точкой. λ_1, λ_2 здесь собственные значения матрицы линейной части. Заметим, что если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $\sigma = 0$.

Случай центра

Bautin's System, Center-Focus Case:

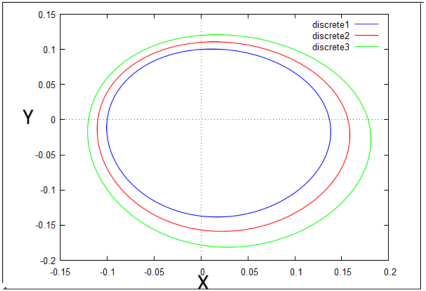
x' = y + a1*x^2 + a2*x*y + a3*y^2

y' =-x + b1*x^2 + b2*x*y + b3*y^2

a1 = a2 = a3 = b1 = b2 = b3 = 1

x0=0, y0=0.1, 0.11, 0.12

Center:



Слабый фокус

Bautin's System, Center-Focus Case:

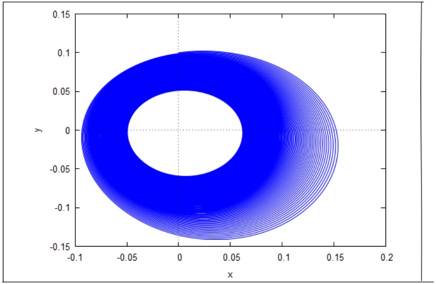
x' = y + a1*x^2 + a2*x*y + a3*y^2

y' =-x + b1*x^2 + b2*x*y + b3*y^2

a1 = a2 = a3 = b1 = b2 = 1, b3 = 2

x0=0, y0=0.1

Weak Focus



Пример гиперболической системы

Модель Лотки – Вольтерры

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \quad \varepsilon_1 x - \gamma_1 x y, \\ \dot{y} &= -\varepsilon_1 y + \gamma_2 x y \end{aligned}$$

Интегрируемый гиперболический случай

Bautin Saddle Integrable System (B6);

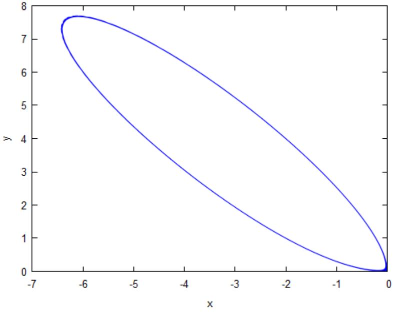
x' = x + a2*x*y + a3*y^2

y' =-y + b1*x^2 - a2/2*y^2

a1 = a2 = a3 = b1 = b2 = b3 = 1

x0 = -0.1, y0 = 0

2001



Неинтегрируемый гиперболический случай

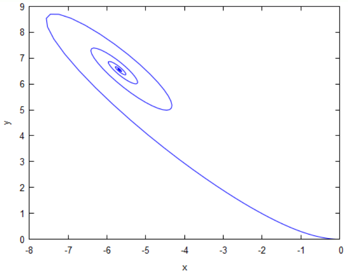
Bautin Saddle non-Integrable System;

x' = x + a2*x*y + a3*y^2

y' =-y + b1*x^2 - (a2/2+0.1)*y^2

```
a1 : 1$ a2 : 1$ a3 : 1$ b1 : 1$ b2 : 1$ b3 : 1;
x0 = -0.1, y0 = 0;
```

2001



Условие интегрируемости как алгебраическая система

- Задача - при каких значениях параметров система интегрируема, т.е. ее можно решить в квадратурах?
- Задача интегрируемости в малой области около неподвижной точки решена. Условие там можно записать в виде системы алгебраических уравнений на параметры.
- Остается проверить – не будет ли условия интегрируемости в неподвижных точках, которое мы знаем, достаточно, для “настоящей” интегрируемости системы?
- Это можно проверить экспериментально.

Пример алгебраической системы для резонанса 1:1

$$a_1 a_2 - b_2 b_3 = 0,$$

$$-a_3 b_2(-6a_1^2 + 9a_1 b_2 + 14 b_1 b_3 + 6b_2^2) + 9a_2^2(a_1 b_2 + b_1 b_3) + a_2(14 a_1 a_3 b_1 - 3b_3(2b_1 b_3 + 3b_2^2)) + 6a_2^3 b_1 = 0,$$

$$432a_1^4 a_2 a_3 + 36a_1^3(54a_2^3 + 18a_2^2 b_3 - 61 a_2 a_3 b_2 - 18 a_3 b_2 b_3) - 6a_1^2(162 a_2^3 b_2 + a_2^2(131 a_3 b_1 - 162 b_2 b_3) + 3a_2 a_3(106 b_1 b_3 + 75 b_2^2) + 2a_3 b_2(194 a_3 b_1 - 381 b_2 b_3)) + a_1(3708 a_2^4 b_1 - 108 a_2^3(33 b_2^2 - 38 b_1 b_3) - 3a_2^2 b_1(5299 a_3 b_2 + 1524 b_3^2) - 4a_2(868 a_3^2 b_1^2 - 981 a_3 b_2^3 + 81 b_3^2(3b_2^2 - 2b_1 b_3)) - 36 b_2(142 a_3^2 b_1 b_2 + a_3 b_3(53 b_1 b_3 - 114 b_2^2) - 18 b_2 b_3^3)) - 1782 a_2^4 b_1 b_2 - 6a_2^3 b_1(523 a_3 b_1 + 654 b_2 b_3) + 18 a_2^2 b_3(-284 a_3 b_1^2 + 75 b_1 b_2 b_3 + 198 b_2^3) + 3a_2(a_3(776 b_1^2 b_3^2 + 5299 b_1 b_2^2 b_3 + 594 b_2^4) + 12 b_2 b_3^2(61 b_1 b_3 + 27 b_2^2)) + 2b_2(a_3^2 b_1(1736 b_1 b_3 + 1569 b_2^2) + 3a_3 b_2 b_3(131 b_1 b_3 - 618 b_2^2) - 108 b_3^3(2b_1 b_3 + 9b_2^2)) = 0.$$

Подобные системы были построены для резонансов $2:1$, $3:1$ и для случая мнимых собственных значений. Добавление в эти системы дополнительных уравнений не меняет их решений.

Общий (нерезонансный) случай

Для общего (нерезонансного) случая нашлось 14 рациональных решений, 11 из них не являются следствиями других:

1) $\{a_2 = 0, a_3 = 0, b_2 = 0\}$;
2) $\{a_2 = 0, a_3 = 0, b_3 = 0\}$;
3) $\{a_1 = 0, b_1 = 0, b_2 = 0\}$;
4) $^*\{a_1 = 0, a_2 = 0, b_1 = 0, b_2 = 0\}$;
5) $\{a_1 = 2b_2, a_2 = 0, b_1 = 0, b_3 = 0\}$;
6) $\{a_1 = 0, a_3 = 0, b_1 = 0, b_3 = 0\}$;
7) $\{a_1 = 0, b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 0\}$;
8) $\{a_1 = 0, b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = -\frac{a_2}{2}\}$;
9) $\{a_1 = b_2, a_3 = 0, b_1 = 0, b_3 = a_2\}$;
10) $\{a_1 = 0, b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = a_2\}$;
11) $\{a_1 = 0, a_3 = 0, b_2 = 0, b_3 = 2a_2\}$;
12) $\{a_1 = 0, b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 2a_2\}$;
13) $^*\{a_1 = 0, a_2 = 0, b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 0\}$;
14) $^*\{a_1 = 0, a_3 = 0, b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = -\frac{a_2}{2}\}$.

Первые интегралы в общем случае

1) $\dot{x} = \alpha x + a_1 x^2, \quad \dot{y} = -y + b_1 x^2 + b_3 y^2,$

   Это интегрируемый случай, но интегральная кривая состоит из единственной точки.

2) $\dot{x} = \alpha x + a_1 x^2, \quad \dot{y} = -y + b_1 x^2 + b_2 xy,$

$$I_2(x,y) = \frac{x^{1/\alpha}(\alpha+a_1x)^{-\frac{1}{\alpha}-\frac{b_2}{a_1}}}{(\alpha+1)a_1}\times \Bigg(\alpha b_1 x\left(\frac{a_1x}{\alpha}+1\right)^{\frac{1}{\alpha}+\frac{b_2}{a_1}} {}_2F_1\left(1+\frac{1}{\alpha},\frac{b_2}{a_1}+\frac{1}{\alpha};2+\frac{1}{\alpha};-\frac{a_1x}{\alpha}\right) - \alpha b_1 x\left(\frac{a_1x}{\alpha}+1\right)^{\frac{1}{\alpha}+\frac{b_2}{a_1}} {}_2F_1\left(1+\frac{1}{\alpha},\frac{b_2}{a_1}+\frac{1}{\alpha}+1;2+\frac{1}{\alpha};-\frac{a_1x}{\alpha}\right) - \alpha a_1 y - a_1 y\Bigg);$$

3) $\dot{x} = \alpha x + a_2 xy + a_3 y^2, \quad \dot{y} = -y + b_3 y^2,$

$$I_3(x,y) = \frac{y^{\alpha}(1-b_3y)^{-\alpha-\frac{a_2}{b_3}}}{\alpha+2}\times \left(a_3y^2(1-b_3y)^{\alpha+\frac{a_2}{b_3}} {}_2F_1\left(\alpha+2,\frac{a_2+b_3+b_3\alpha}{b_3};\alpha+3;b_3y\right) + \alpha x + 2x\right);$$

4) $\dot{x} = \alpha x + a_3 y^2, \quad \dot{y} = -y + b_3 y^2,$

$$I_4(x,y) = \frac{e^{-\alpha(\log(1-b_3 y)-\log(y))}}{(\alpha+1)b_3} \times$$
$$\left(a_3 y^{\alpha+1}\,{}_2F_1(\alpha, \alpha+1; \alpha+2; b_3 y) e^{\alpha(\log(1-b_3 y)-\log(y))} - \right.$$
$$a_3 y^{\alpha+1}\,{}_2F_1(\alpha+1, \alpha+1; \alpha+2; b_3 y) e^{\alpha(\log(1-b_3 y)-\log(y))} -$$
$$\left. \alpha b_3 x - b_3 x\right)$$

5) $\dot{x} = \alpha x + 2b_2 x^2 + a_3 y^2, \quad \dot{y} = -y + b_2 xy,$

$$I_5(x,y) = \frac{a_3 b_2^2}{\alpha(\alpha+2)(b_2+1)} \times$$
$$\left(-\alpha \log\left(\alpha + a_3 b_2 y^2 + 2b_2 x\right) - 2\log\left(\alpha + a_3 b_2 y^2 + 2b_2 x\right) + \right.$$
$$\left. 2\log\left(a_3 y^2 + (\alpha+2)x\right) + 2\alpha\log(y)\right)$$

6) $\dot{x} = \alpha x + a_2 xy, \quad \dot{y} = -y + b_2 xy,$

$$I_6(x,y) = -b_2 x + a_2 y + \log(x) + \alpha \log(y);$$

7) $\dot{x} = \alpha x + a_2 xy + a_3 y^2, \quad \dot{y} = -y,$

$$I_7(x,y) = y^{\alpha}(-a_2 y)^{-\alpha}\left(a_2^2 x e^{a_2 y}(-a_2 y)^{\alpha} - a_3 \Gamma(\alpha+2, -a_2 y)\right)/a_2^2;$$

8) $\dot{x} = \alpha x + a_2xy + a_3y^2, \quad \dot{y} = -y - \frac{1}{2}a_2y^2,$

$$I_8(x,y) = \frac{y^\alpha}{(\alpha+2)(\alpha+3)(a_2y+2)^\alpha}\times \Big(2a_3y^2\left(\tfrac{1}{2}a_2y+1\right)^\alpha \big(2(\alpha+3)\,{}_2F_1\left(\alpha,\alpha+2;\alpha+3;-\tfrac{1}{2}a_2y\right) + (\alpha+2)a_2y\,{}_2F_1\left(\alpha,\alpha+3;\alpha+4;-\tfrac{1}{2}a_2y\right)\big) + (\alpha+2)(\alpha+3)x(a_2y+2)^2\Big)\,;$$

9) $\dot{x} = \alpha x + b_2x^2 + a_2xy, \quad \dot{y} = -y + b_2xy + a_2y^2,$

$$I_9(x,y) = \frac{xy^\alpha}{b_2}\left(\alpha - \alpha\, a_2y + b_2x\right)^{-\alpha-1};$$

10) $\dot{x} = \alpha x + a_2xy + a_3y^2, \quad \dot{y} = -y + a_2y^2,$

$$I_{10}(x,y) = \frac{y^\alpha}{(\alpha+1)a_2(a_2y-1)(1-a_2y)^\alpha}\times \Big(a_2a_3y^2(1-a_2y)^\alpha\,{}_2F_1(\alpha+1,\alpha+1;\alpha+2;a_2y) - a_3y(1-a_2y)^\alpha\,{}_2F_1(\alpha+1,\alpha+1;\alpha+2;a_2y) + \alpha a_2x + a_2x + a_3y\Big)\,;$$

11) $\dot{x} = \alpha x + a_2xy, \quad \dot{y} = -y + b_1x^2 + 2a_2y^2,$

$$I_{11}(x,y) = \frac{a_2^2b_1x^2\left(-b_1x^2+2\alpha y+y\right)^{2\alpha}}{\alpha(2\alpha+1)(a_2-\alpha)(\alpha(2a_2y-1)-a_2b_1x^2)^{2\alpha+1}};$$

12) $\dot{x} = \alpha x + a_2 xy + a_3 y^2, \quad \dot{y} = -y + 2a_2 y^2,$

$$I_{12}(x,y) = \quad \frac{y^{\alpha}(1-2a_2 y)^{-\alpha-\frac{1}{2}}}{\alpha+2} \times \Big(a_3 y^2 (1-2a_2 y)^{\alpha+\frac{1}{2}}\, {}_2F_1\left(\alpha+\tfrac{3}{2}, \alpha+2; \alpha+3; 2a_2 y\right) + \alpha x + 2x\Big);$$

13) $\dot{x} = \alpha x + a_3 y^2, \quad \dot{y} = -y,$

$I_{13}(x,y) = y^{\alpha}(2x + \alpha x + a_3 y^2)/(2+\alpha);$

14) $\dot{x} = \alpha x + a_2 xy, \quad \dot{y} = -y - \frac{1}{2}\, a_2 y^2,$

$I_{14}(x,y) = xy^{\alpha}(a_2 y + 2)^{2-\alpha}.$

Справочник Камке

ГЛАВА IX

СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1—17. Системы двух дифференциальных уравнений

9.1 $x' = -x(x+y)$, $y' = y(x+y)$.
Из этих уравнений получаем $yx' + xy' = 0$, т. е. $xy = C$. Таким образом, эта система сводится к одному уравнению с разделяющимися переменными $x' + x^2 + C = 0$.

9.2. $x' = (ay + b)x$, $y' = (cx + d)y$.
Из этих уравнений следует

$$\left(a + by^{-1}\right) y' = \left(c + dx^{-1}\right) x', \quad \text{т. е.} \quad y^b e^{ay} = Cx^d e^{cx}.$$

О дальнейшем исследовании решений в связи с некоторыми биологическими проблемами см. V. Volterra, *Rendiconti Sem. Mat. Milano* **3** (1930), стр. 158 и сл.

9.3. $x' = [a(px + qy) + \alpha]\, x$, $y' = [b(px + qy) + \beta]\, y$.
Отсюда следует $y^a x^{-b} = Ce^{(a\beta - b\alpha)t}$. См. V. Volterra, *Rendiconti Sem. Mat. Milano* **3** (1930), стр. 158 и сл. О дальнейшем исследовании этих уравнений в связи с некоторыми биологическими проблемами см. также A. J. Lotka, *Journ. Washington Acad.* **22** (1932), стр. 461—469; V. A. Kostitzin, *Actualités scientif.* **96** (1934).

9.4. $x' = h(a - x)(c - x - y)$, $y' = k(b - y)(c - x - y)$.
Из этих уравнений следует $|y - b|^h = C\,|x - a|^k$. Таким образом, эта система может быть сведена к одному уравнению относительно x или y. Если в области $0 \leqslant x < a$, $0 \leqslant y < b$, $x + y < c$ требуется найти решение, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = y(0) = 0$, то получаем уравнение

$$x' = h(c - a - b)(a - x) + h(a - x)^2 + hba^{-k/h}(a - x)^{(k+h)/h}$$

и соответствующее уравнение для y. См. H. J. Curnow, *Journ. London Math. Soc.* **3** (1928), стр. 88—92. Подробное изучение этих уравнений в связи с некоторыми химическими проблемами см. J. G. van der Corput, H. J. Backer, *Proceedings Amsterdam* **41** (1938), стр. 1058—1073.

9.5 $x' = y^2 - \cos x$, $y' = -y \sin x$.
Отсюда следует $3y\cos x = y^3 + C$.
См. Е. Иконников, *ЖТФ* **4** (1937), стр. 433—437.

9.6. $x' = -xy^2 + x + y$, $y' = x^2 y - x - y$.
Решения удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 - 2\ln|xy - 1| = C$.

Модели химической кинетики

- Модель Жаботинского – Корзухина [Корзухин, Жаботинский 1965].
$$\begin{aligned}\dot{x} &= k_1 x(C-y) - k_0 x z,\\ \dot{y} &= k_1 x(C-y) - k_2 y,\\ \dot{z} &= k_2 y - k_3 z.\end{aligned}$$
Собственные значения линейной части: $\{C \cdot k_1, -k_2, -k_3\}$.
- Орегонатор
$$\begin{aligned}\dot{x} &= \quad A k_3 x - 2k_4 x^2 + A k_1 y - k_1 x y,\\ \dot{y} &= -A k_1 y - k_2 x y + f k_5 z,\\ \dot{z} &= \quad A k_3 x - k_5 z.\end{aligned}$$

Интегрируемые случаи трехмерной задачи

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \quad M_x \cdot x + a_2 x \cdot y + a_4 x \cdot z + a_5 y \cdot z, \\
\dot{y} &= -M_y \cdot y + b_2 x \cdot y + b_4 x \cdot z + b_5 y \cdot z, \\
\dot{z} &= \quad\; - z + c_2 x \cdot y + c_4 x \cdot z + c_5 y \cdot z.
\end{aligned}$$

MATHEMATICA 13.3.1.0

N	M_x	M_y	Решений алг.сист.	Интегрируемых	%успеха
8	1	1	23	19	83
8	1	2	16	12	75
8	1	3	25	19	76
8	2	1	57	49	86
8	2	2	34	29	85
8	2	3	43	35	81
9	3	1	60	51	85
9	3	2	63	58	92
9	3	3	—	—	—
10	3	3	43	38	88

Общий (нерезонансный) случай

Объединяя 9 систем выше мы получили систему из 329 алгебраических уравнений. У нее 10 решений и все интегрируемые:

1. $\dot{x} = M_x x + a_2 x \cdot y + a_4 x \cdot z + a_5 y \cdot z, \dot{y} = -M_y y + b_5 y \cdot z, \dot{z} = -z + c_5 y \cdot z;$
2. $\dot{x} = M_x x, \dot{y} = -M_y y + b_2 x \cdot y + b_4 x \cdot z, \dot{z} = -z + c_4 x \cdot z;$
3. $\dot{x} = M_x x + a_2 x \cdot y + a_4 x \cdot z + a_5 y \cdot z, \dot{y} = -M_y y + a_4 y \cdot z, \dot{z} = -z - a_2 y \cdot z;$
4. $\dot{x} = M_x x, \dot{y} = -M_y y + b_2 x \cdot y, \dot{z} = -z + c_4 x \cdot z;$
5. $\dot{x} = M_x x, \dot{y} = -M_y y + b_4 x \cdot z, \dot{z} = -z + c_4 x \cdot z;$
6. $\dot{x} = M_x x, \dot{y} = -M_y y, \dot{z} = -z + c_4 x \cdot z + c_5 y \cdot z;$
7. $\dot{x} = M_x x, \dot{y} = -M_y y + b_2 x \cdot y + b_5 y \cdot z, \dot{z} = -z;$
8. $\dot{x} = M_x x + a_4 x \cdot z, \dot{y} = -M_y y + b_4 x \cdot z + a_4 y \cdot z, \dot{z} = -z;$
9. $\dot{x} = M_x x + a_5 y \cdot z, \dot{y} = -M_y y + b_2 x \cdot y, \dot{z} = -z - b_2 x \cdot z;$
10. $\dot{x} = M_x x, \dot{y} = -M_y y, \dot{z} = -z + c_4 x \cdot z.$

Совсем общий случай

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \quad M_x x + a_1 x^2 + a_2 x \cdot y + a_3 y^2 + a_4 x \cdot z + a_5 y \cdot z + a_6 z^2, \\
\dot{y} &= -M_y y + b_1 x^2 + b_2 x \cdot y + b_3 y^2 + b_4 x \cdot z + b_5 y \cdot z + b_6 z^2, \\
\dot{z} &= \quad\; - z + c_1 x^2 + c_2 x \cdot y + c_3 y^2 + c_4 x \cdot z + c_5 y \cdot z + c_6 z^2.
\end{aligned}$$

Посчитав нормальную форму до 6 порядка для 4 пар $\{M_x, M_y\} = \{1, 1\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 1\}$ и $\{2, 2\}$, получили систему из 121 уравнения на 18 параметров. Вычислили 174 ее решения. Для 109 из них MATHEMATICA-13 посчитала решения соответствующих ОДУ.

Заключение

- Для двумерной автономной полиномиальной системы ОДУ предложен алгоритм построения такой алгебраической системы на параметры ОДУ, что на семействах ее решений удается найти первые интегралы. Получено обобщение на трехмерный случай.
- Алгоритм основан на исследовании резонансов в неподвижных точках системы ОДУ, но позволяет рассматривать и общий (нерезонансный) случай.

- Задачи исследования систем ОДУ с полиномиальной правой частью часто встречаются в моделировании различных природных процессов. Как правило, такие модели содержат значительное количество параметров.
- Численно на сетке задачи с большим числом параметров исследовать очень сложно, поэтому очень важно иметь решение моделей в виде конечных формул.
- В справочниках есть отдельне примеры таких точных решений. Но на самом деле их существует много.

Bibliography I

- Баутин Н.Н., О числе предельных циклов, возникающих при вариации коэффициентов от точки равновесия типа фокуса или центра. Мат. сборник 30 (1952) с. 181–196.
- Bruno A.D., Analytical form of differential equations (I,II). Trudy Moskov. Mat. Obsc. 25, 119–262 (1971), 26, 199–239 (1972) (in Russian) = Trans. Moscow Math. Soc. 25, 131–288 (1971), 26, 199–239 (1972) (in English).
- Bruno A.D., Local Methods in Nonlinear Differential Equations. Nauka, Moscow 1979 (in Russian) = Springer-Verlag, Berlin (1989) P.348.
- Bruno A.D., Power Geometry in Algebraic and Differential Equations, Fizmatlit, Moscow, 1998 (Russian) = Elsevier Science, Amsterdam (2000) (English)

Bibliography II

- Брюно А.Д., Еднерал В.Ф., Об интегрируемости двухмерной системы ОДУ в окрестности вырожденной неподвижной точки. Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова РАН, изд-во СПОМИ РАН, Санкт-Петербург 373 (2009) 34–47.
- Брюно А.Д., Еднерал В.Ф., Интегрирование вырожденной системы ОДУ. Программирование № 2 (2024) (В печати).
- Edneral V. F., Krustalev O. A., Package for reducing ordinary differential-equations to normal-form. Programming and Computer Software 18, # 5 (1992) 234–239.
- Edneral V.F., Computer Evaluation of Cyclisity in Planar Cubic System. In Proceedings of the 1997 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC97), ed. by W. Küchlin, ISBN: 0-89791-875-4, ACM, New York, pp. 305–309.

Bibliography III

- Edneral V.F., A symbolic approximation of periodic solutions of the Henon-Heiles system by the normal form method. Mathematics and Computers in Simulation 45, # 5-6 (1998) 445–463.
- Edneral V.F., Khanin R., Application of the resonance normal form to high-order nonlinear ODEs using Mathematica. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment 502 (2–3) (2003) 643–645.
- Edneral V.F., Integrable Cases of the Polynomial Liénard-type Equation with Resonance in the Linear Part. Mathematics in Computer Science 17 19 (2023). https://doi.org/10.1007/s11786-023-00567-6
- Edneral V.F., Integrable Cases of the Bautin System. Mathematics in Computer Science (2024) (Направлено в печать).
- Hilbert D., Über die Theorie der algebraischen Formen. Mathematische Annalen 36 473–534 (1890)

Bibliography IV

- Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям // М.: Наука (1971), 576 стр..
- Корзухин М. Д., Жаботинский А. М. Математическое моделирование химических и экологических автоколебательных систем // М.: Наука (1965).
- Liénard A., Etude des oscillations entretenues, Revue générale de l'électricité 23 (1928) 901–912 and 946–954.
- Lunkevich V.A., Sibirskii K.S., Integrals of General Differential System at the Case of Center. Differential Equation, 18,# 5 (1982) 786–792 (in Russian).
- A.D. Polyanin, V.F. Zaitsev, Handbook of exact solutions for ordinary differential equations–2nd ed. Chapman & Hall, CRC Press (2003) P. 803.

Благодарю за внимание